# El reticulado de subvariedades de $\mathcal{MG}$

P. Díaz Varela - N. Lubomirsky

UNLP - INMABB - CONICET

## Definición

*Una* **t-norma** *es una operación binaria* $* : [0,1]^2 \to [0,1]$ *que satisface las siguientes condiciones:*

1. $*$ *es conmutativa y asociativa.*
2. $*$ *es no decreciente en ambos argumentos, es decir, para todo* $x, y, z \in [0,1]$

$$x \leq y \text{ implica } x * z \leq y * z \text{ y } z * x \leq z * y,$$

3. $1 * x = x$ *y* $0 * x = 0$ *para todo* $x \in [0,1]$.

*Una* **t-norma continua** *es una t-norma que es continua como aplicación de* $[0,1]^2$ *en* $[0,1]$. *Para toda t-norma continua se puede definir un residuo que satisface:*

$$x * z \leq y \text{ si y solamente si } x \leq z \to y.$$

## Definición

*Una* **t-norma** *es una operación binaria* $*: [0,1]^2 \to [0,1]$ *que satisface las siguientes condiciones:*

1. $*$ *es conmutativa y asociativa.*
2. $*$ *es no decreciente en ambos argumentos, es decir, para todo* $x, y, z \in [0,1]$

$$x \leq y \text{ implica } x * z \leq y * z \text{ y } z * x \leq z * y,$$

3. $1 * x = x$ *y* $0 * x = 0$ *para todo* $x \in [0,1]$.

*Una* **t-norma continua** *es una t-norma que es continua como aplicación de* $[0,1]^2$ *en* $[0,1]$*. Para toda t-norma continua se puede definir un residuo que satisface:*

$$x * z \leq y \text{ si y solamente si } x \leq z \to y.$$

El álgebra $([0,1], *, \to, max, min, 0, 1)$ es al álgebra estándar asociada a la t-norma continua $*$.

# EJEMPLOS

1. *t-norma de Łukasiewicz:* $x *_L y = max(0, x + y - 1)$
   *Implicación de Łukasiewicz:* $x \rightarrow_L y = min(1, 1 - x + y)$,
2. *t-norma de Gödel :* $x *_G y = min(x, y)$,
   *Implicación de Gödel :*

$$x \rightarrow_G y = \begin{cases} y & si \quad x > y; \\ 1 & si \quad x \leq y. \end{cases}$$

3. *t-norma producto:* $x *_P y = x \cdot y$,
   *Implicación de Goguen:*

$$x \rightarrow_P y = \begin{cases} y/x & si \quad x > y; \\ 1 & si \quad x \leq y. \end{cases}$$

## Ejemplos

1. *t-norma de Łukasiewicz:* $x *_L y = max(0, x + y - 1)$
   *Implicación de Łukasiewicz:* $x \to_L y = min(1, 1 - x + y)$,
2. *t-norma de Gödel :* $x *_G y = min(x, y)$,
   *Implicación de Gödel :*

$$x \to_G y = \begin{cases} y & si \quad x > y; \\ 1 & si \quad x \leq y. \end{cases}$$

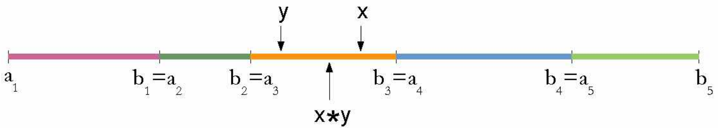
3. *t-norma producto:* $x *_P y = x \cdot y$,
   *Implicación de Goguen:*

$$x \to_P y = \begin{cases} y/x & si \quad x > y; \\ 1 & si \quad x \leq y. \end{cases}$$

Las álgebras $([0,1], *_L, \to_L, max, min, 0, 1)$, $([0,1], *_G, \to_G, max, min, 0, 1)$ y $([0,1], *_P, \to_P, max, min, 0, 1)$ son las álgebras estándar de Łukasiewicz, Gödel y Producto, respectivamente.

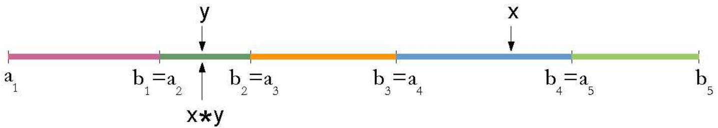
Si $(a_i, b_i)_{i \in I}$ es una familia de intervalos disjuntos, con $0 \leq a_i < b_i \leq 1$ y tales que $*^i$ es una t-norma continua sobre $(a_i, b_i)$, definimos para todo par $x, y \in [0, 1]$ una t-norma continua llamada **suma ordinal de las t-normas**:

$$x * y = \begin{cases} x *^i_{[a_i, b_i]} y & \text{si } x, y \in (a_i, b_i); \\ min\{x, y\} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$



Si $(a_i, b_i)_{i \in I}$ es una familia de intervalos disjuntos, con $0 \leq a_i < b_i \leq 1$ y tales que $*^i$ es una t-norma continua sobre $(a_i, b_i)$, definimos para todo par $x, y \in [0,1]$ una t-norma continua llamada **suma ordinal de las t-normas**:

$$x * y = \begin{cases} x *^i_{[a_i, b_i]} y & \text{si } x, y \in (a_i, b_i); \\ min\{x, y\} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$



Si $(a_i, b_i)_{i \in I}$ es una familia de intervalos disjuntos, con $0 \leq a_i < b_i \leq 1$ y tales que $*^i$ es una t-norma continua sobre $(a_i, b_i)$, definimos para todo par $x, y \in [0, 1]$ una t-norma continua llamada **suma ordinal de las t-normas**:

$$x * y = \begin{cases} x *^i_{[a_i, b_i]} y & \text{si } x, y \in (a_i, b_i); \\ min\{x, y\} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

**Teorema (Mostert-Schields)**

*Toda t-norma continua es la suma ordinal de una familia de t-normas de Łukasiewicz, Gödel y producto.*

## Definiciones

*Un* **hoop** *es un álgebra* $\mathbf{A} = (A, *, \rightarrow, \top)$ *de tipo* $(2, 2, 0)$*, tal que* $(A, *, \top)$ *es un monoide conmutativo tal que para todo* $x, y, z \in A$*:*

1. $x \rightarrow x = \top$,
2. $x * (x \rightarrow y) = y * (y \rightarrow x)$,
3. $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x * y) \rightarrow z$.

# Hoops y BL-Álgebras



## Definiciones

*Un* **hoop** *es un álgebra* $\mathbf{A} = (A, *, \to, \top)$ *de tipo* $(2, 2, 0)$*, tal que* $(A, *, \top)$ *es un monoide conmutativo tal que para todo* $x, y, z \in A$*:*

1. $x \to x = \top$,
2. $x * (x \to y) = y * (y \to x)$,
3. $x \to (y \to z) = (x * y) \to z$.

*Un* **hoop básico** *es un hoop que satisface la ecuación*

$$(((x \to y) \to z) * ((y \to x) \to z)) \to z) = \top$$

# Hoops y BL-Álgebras



## Definiciones

*Un* **hoop** *es un álgebra* $\mathbf{A} = (A, *, \to, \top)$ *de tipo* $(2, 2, 0)$*, tal que* $(A, *, \top)$ *es un monoide conmutativo tal que para todo* $x, y, z \in A$*:*

1. $x \to x = \top$,
2. $x * (x \to y) = y * (y \to x)$,
3. $x \to (y \to z) = (x * y) \to z$.

*Un* **hoop básico** *es un hoop que satisface la ecuación*

$$(((x \to y) \to z) * ((y \to x) \to z)) \to z) = \top$$

*Una* **BL-álgebra** *es un hoop básico acotado, es decir, un álgebra* $\mathbf{A} = (A, *, \to, \bot, \top)$ *de tipo* $(2, 2, 0, 0)$ *tal que* $(A, *, \to, \top)$ *es un hoop básico y* $\bot$ *es el mínimo de* $A$*.*

## Definición

*La clase de BL-álgebras es la variedad generada por todas las álgebras con t-normas continuas.*

## Definición

*La clase de BL-álgebras es la variedad generada por todas las álgebras con t-normas continuas.*

BL-álgebras

| MV-álgebras | Álgebras de Gödel | Álgebras producto |
|---|---|---|
| $x *_L y = max(0, x + y - 1)$ | $x *_G y = min(x, y)$ | $x *_P y = x \cdot y$ |

# Sumas ordinales



## Definición

*Sean* $\mathbf{A} = \langle A, \cdot_A, \rightarrow_A, \top \rangle$ *y* $\mathbf{B} = \langle B, \cdot_B, \rightarrow_B, \top \rangle$ *dos hoops tales que* $A \cap B = \{\top\}$. *Luego podemos definir la* **suma ordinal** *de* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *como el hoop* $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \langle A \cup B, \cdot, \rightarrow, \top, \rangle$, *donde las operaciones* $\cdot$ *y* $\rightarrow$ *están dadas por:*

$$x \cdot y = \begin{cases} x \cdot_A y & si \quad x, y \in A; \\ x \cdot_B y & si \quad x, y \in B; \\ x & si \quad x \in A \setminus \{\top\},\ y \in B; \\ y & si \quad y \in B \setminus \{\top\},\ x \in A. \end{cases}$$

$$x \rightarrow y = \begin{cases} x \rightarrow_A y & si \quad x, y \in A; \\ x \rightarrow_B y & si \quad x, y \in B; \\ \top & si \quad x \in A \setminus \{\top\},\ y \in B; \\ y & si \quad y \in A,\ x \in B. \end{cases}$$

# Descomposición en elementos regulares y densos



Dada una BL-álgebra $\mathbf{A}$ podemos considerar los conjuntos

$$MV(\mathbf{A}) = \{x \in A : \neg\neg x = x\},$$

cuyos elementos llamaremos **elementos regulares** de $\mathbf{A}$ y

$$D(\mathbf{A}) = \{x \in A : \neg x = \bot\},$$

que se conocen como se conocen como **elementos densos** de $\mathbf{A}$.

# Descomposición en elementos regulares y densos



Dada una BL-álgebra **A** podemos considerar los conjuntos

$$MV(\mathbf{A}) = \{x \in A : \neg\neg x = x\},$$

cuyos elementos llamaremos **elementos regulares** de **A** y

$$D(\mathbf{A}) = \{x \in A : \neg x = \bot\},$$

que se conocen como se conocen como **elementos densos** de **A**.

### Teorema (Busaniche)

*Para toda BL-cadena* **A***, tenemos que* $\mathbf{A} \cong \mathbf{MV}(\mathbf{A}) \oplus \mathbf{D}(\mathbf{A})$.

# La subvariedad $\mathcal{MG}$



Nuestro objetivo es estudiar la subvariedad generada por la suma ordinal del álgebra $[0,1]_{\mathbf{MV}}$ y el hoop de Gödel $[0,1]_{\mathbf{G}}$, es decir, generada por

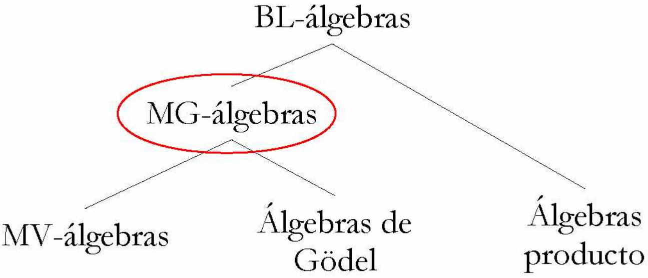
$$\mathfrak{A} = [0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus [0,1]_{\mathbf{G}}.$$

# La subvariedad $\mathcal{MG}$



Nuestro objetivo es estudiar la subvariedad generada por la suma ordinal del álgebra $[0,1]_{\mathbf{MV}}$ y el hoop de Gödel $[0,1]_{\mathbf{G}}$, es decir, generada por

$$\mathfrak{A} = [0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus [0,1]_{\mathbf{G}}.$$



# T-NORMA Y VARIEDAD $\mathcal{MG}$

$$t(x,y) = \begin{cases} max(0, x+y-\frac{1}{2}) & \text{si } x, y \in [0, \frac{1}{2}); \\ min(x,y) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

# T-NORMA Y VARIEDAD $\mathcal{MG}$



$$t(x,y) = \begin{cases} max(0, x+y-\frac{1}{2}) & \text{si } x, y \in [0, \frac{1}{2}); \\ min(x,y) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

## Teorema

$\mathcal{MG} = \mathcal{MV} \oplus^t \mathcal{G}$.

## Corolario

*$\mathcal{MG}$ como subvariedad de $\mathcal{BL}$ está caracterizado por la ecuación*

$$(\neg\neg x \to x)^2 = (\neg\neg x \to x)$$

# T-NORMA Y VARIEDAD $\mathcal{MG}$

$$t(x,y) = \begin{cases} max(0, x+y-\frac{1}{2}) & \text{si } x,y \in [0,\frac{1}{2}); \\ min(x,y) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

## Teorema

$\mathcal{MG} = \mathcal{MV} \oplus^t \mathcal{G}$.

## Corolario

*$\mathcal{MG}$ como subvariedad de $\mathcal{BL}$ está caracterizado por la ecuación*

$$(\neg\neg x \to x)^2 = (\neg\neg x \to x)$$

¿Cuál es el reticulado de subvariedades de $\mathcal{MG}$?

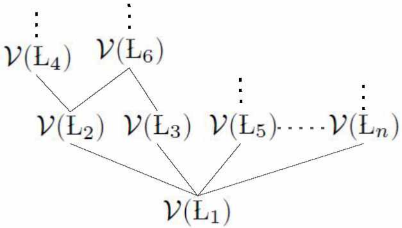
# El reticulado de subvariedades $\Lambda(\mathcal{MV})$



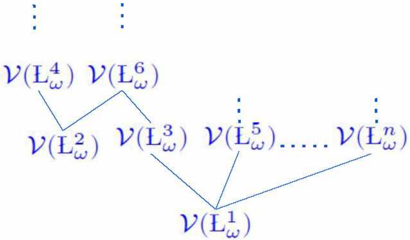
$$Ł_n = \Gamma(\mathbb{Z}, n)$$

$$Ł_\omega^n = \Gamma(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (n, 0))$$

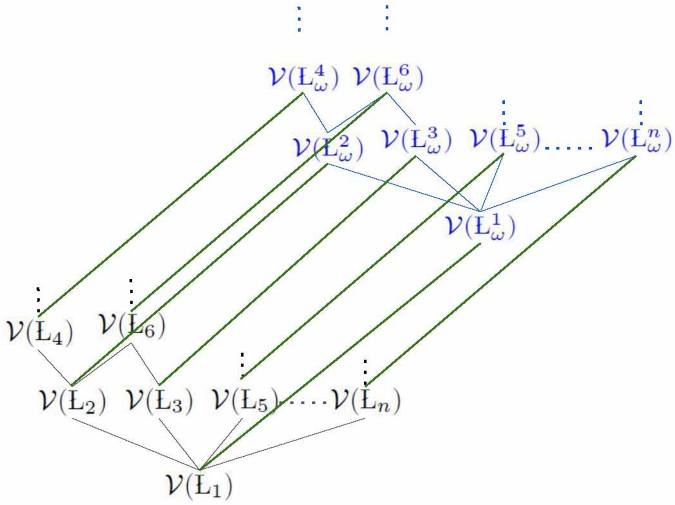
# El reticulado de subvariedades $\boldsymbol{\Lambda}(\mathcal{MV})$



# El reticulado de subvariedades $\Lambda(\mathcal{MV})$



# El reticulado de subvariedades $\mathbf{\Lambda}(\mathcal{MV})$



# El reticulado de subvariedades $\Lambda(\mathcal{GA})$

$\mathcal{GA}$ tiene elementos idempotentes, por lo que tiene la EDPC (distributividad de congruencias) y el reticulado de subvariedades es una cadena numerable por lo que cualquier subvariedad propia es localmente finita.

$$\vdots$$

$$\mathcal{V}(\mathrm{GA}_n)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{V}(\mathrm{GA}_5)$$

$$\mathcal{V}(\mathrm{GA}_4)$$

$$\mathcal{V}(\mathrm{GA}_3)$$

$$\mathcal{V}(\mathrm{GA}_2)$$

$$\mathcal{V}(\mathrm{GA}_1)$$

# El reticulado de subvariedades $\Lambda(\mathcal{G})$ (Agliano - Varieties III)

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, dash, dotted] \\
\mathcal{V}(\mathrm{G}_n) \arrow[d, dash, dotted] \\
\mathcal{V}(\mathrm{G}_5) \arrow[d, dash] \\
\mathcal{V}(\mathrm{G}_4) \arrow[d, dash] \\
\mathcal{V}(\mathrm{G}_3) \arrow[d, dash] \\
\mathcal{V}(\mathrm{G}_2) \arrow[d, dash] \\
\mathcal{V}(\mathrm{G}_1)
\end{tikzcd}
$$

## Teorema

*Los elementos completamente supremo irreducibles de* $\mathbf{\Lambda}(\mathcal{MG})$ *son* $\mathcal{V}(\mathbf{C})$ *donde* $\mathbf{C}$ *es una cadena subdirecamente irreducible de* $\mathcal{MG}$*, es decir, son de alguna de las siguientes formas:*

- $Ł_n$
- $Ł_\omega^n$
- $Ł_n \oplus G_n$
- $Ł_\omega^n \oplus G_n$

## Teorema

*Los elementos completamente supremo irreducibles de* $\mathbf{\Lambda}(\mathcal{MG})$ *son* $\mathcal{V}(\mathbf{C})$ *donde* $\mathbf{C}$ *es una cadena subdirecamente irreducible de* $\mathcal{MG}$*, es decir, son de alguna de las siguientes formas:*

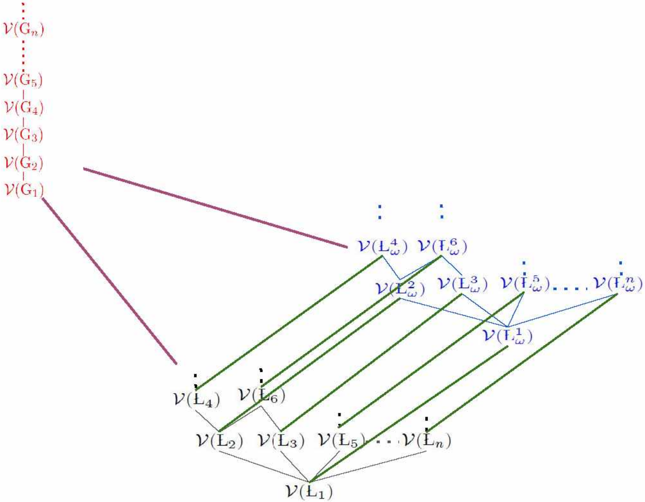
- $\L_n$
- $\L_\omega^n$
- $\L_n \oplus G_n$
- $\L_\omega^n \oplus G_n$

## Corolario

*Los elementos supremo irreducibles del reticulado de subvariedades de* $\mathcal{MG}$ *forman un conjunto ordenado.*

$$(2 \times D(\mathbb{N})) \times (\omega + 1)$$

# SUPREMO IRREDUCIBLES EN EL RETICULADO DE SUBVARIEDADES DE $\mathcal{MG}$



### Teorema (Agliano-Montagna)

*Si $\mathcal{A}$ es una variedad en $\boldsymbol{\Lambda}(\mathcal{MG})$ entonces $\mathcal{A}$ es supremo finito de variedades supremo irreducibles.*

# Bases ecuacionales



## Lema (Di Nola - Lettieri)

*Para $n \geq 2$, la subvariedad $\mathcal{V}(Ł_\omega^n)$ de $\mathcal{MV}$ está caracterizada por la siguiente identidad:*

$$(((n+1)x^n)^2 \leftrightarrow 2x^{n+1}) \wedge ((p.x^{p-1})^{n+1} \leftrightarrow (n+1)x^p) = 1 \quad (\alpha_\omega^n)$$

*para todo entero positivo $1 < p < n$ tal que $p$ no es divisor de $n$.*

# Bases ecuacionales



## Lema (Di Nola - Lettieri)

*Para $n \geq 2$, la subvariedad $\mathcal{V}(Ł_\omega^n)$ de $\mathcal{MV}$ está caracterizada por la siguiente identidad:*

$$(((n+1)x^n)^2 \leftrightarrow 2x^{n+1}) \wedge ((p.x^{p-1})^{n+1} \leftrightarrow (n+1)x^p) = 1 \quad (\alpha_\omega^n)$$

*para todo entero positivo $1 < p < n$ tal que $p$ no es divisor de $n$.*

## Lema (Di Nola - Lettieri)

*Para $n \geq 2$, la subvariedad $\mathcal{V}(Ł_n)$ de $\mathcal{MV}$ está caracterizada por la siguiente identidad:*

$$(((n+1)x^n)^2 \leftrightarrow 2x^{n+1}) \wedge ((p.x^{p-1})^{n+1} \leftrightarrow (n+1)x^p) \wedge ((n+1)x^q \leftrightarrow (n+2)x^q) = 1 \quad (\alpha_n)$$

*para todo entero positivo $1 < p < n$ tal que $p$ no es divisor de $n$ y todo entero $q$ tal que $1 < q < n$ y $q$ divide a $n$.*

# Bases ecuacionales



## Lema (Hecht - Kartiñak)

*Para $n \geq 2$, la subvariedad $\mathcal{V}(G_n)$ de $\mathcal{G}$ está caracterizada por la siguiente identidad:*

$$\bigvee_{i=1}^{n+1} (x_i \leftrightarrow x_{i+1}) = 1 \quad (\gamma_n)$$

# Bases ecuacionales



## Teorema

*Las ecuaciones que caracterizan a las variedades completamente supremo irreducibles de $\mathbf{\Lambda}(\mathcal{MG})$ son:*

- $Ł_n$: $\alpha_n$
- $Ł_\omega^n$: $\alpha_\omega^n$
- $Ł_n \oplus G_n$: $(\neg\neg\alpha_n \rightarrow \alpha_n) \wedge (\neg\neg\gamma_n)$
- $Ł_\omega^n \oplus G_n$: $(\neg\neg\alpha_\omega^n \rightarrow \alpha_\omega^n) \wedge (\neg\neg\gamma_n)$

# Bases ecuacionales



## Teorema

*Las ecuaciones que caracterizan a las variedades completamente supremo irreducibles de $\mathbf{\Lambda}(\mathcal{MG})$ son:*

- $Ł_n$: $\alpha_n$
- $Ł_\omega^n$: $\alpha_\omega^n$
- $Ł_n \oplus G_n$: $(\neg\neg\alpha_n \to \alpha_n) \wedge (\neg\neg\gamma_n)$
- $Ł_\omega^n \oplus G_n$: $(\neg\neg\alpha_\omega^n \to \alpha_\omega^n) \wedge (\neg\neg\gamma_n)$

## Corolario

*Si $\mathcal{A}$ es una variedad en $\mathbf{\Lambda}(\mathcal{MG})$ tal que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{A}_k$ y $\beta_1, \ldots, \beta_k$ son las ecuaciones que caracterizan las variedades $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$ como subvariedades de $\mathcal{MG}$ entonces $\mathcal{A}$ está caracterizada como subvariedad mediante la ecuación*

$$\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_k = 1$$

# Álgebras libres: Un ejemplo

$$\mathcal{V}(\mathbf{C}) = \mathcal{V}(Ł_{\omega}^{1} \oplus G_2)$$

# Álgebras libres: Un ejemplo

$$\mathcal{V}(\mathbf{C}) = \mathcal{V}(Ł_{\omega}^{1} \oplus G_2)$$

| | |
|---|---|
| $Free_{\mathcal{MV}}(1) \circ 1$ | $Free_{\mathcal{G}_2}(1)$ |
| $Free_{\mathcal{MV}}(2)$ | $Free_{\mathcal{MV}}(1) \circ 1$ |

# Álgebras libres: Un ejemplo



$$\mathcal{V}(\mathbf{C}) = \mathcal{V}(\text{Ł}_\omega^1 \oplus G_2)$$

| | |
|---|---|
| $Free_{\mathcal{MV}}(1) \circ 1$ | $Free_{\mathcal{G}_2}(1)$ |
| $Free_{\mathcal{MV}}(2)$ | $Free_{\mathcal{MV}}(1) \circ 1$ |

Sale del cociente de $Free_{\mathcal{MG}}(2)$ por el filtro

$$(\neg\neg x \leftrightarrow \neg\neg y) \vee (\neg\neg y \leftrightarrow \neg\neg x)$$

Aglianò, P., Ferreirim, I. M. A., Montagna, F., *Basic Hoops: an Algebraic Study of Continuous t-norms* Studia Logica, 2007 vol. 87, n. 1, pag. 73-98.

Aglianò, P., Montagna, F., *Varieties of BL-algebras I: general properties* Journal of Pure and Applied Algebra, 2003, vol. 181, n. 2-3, pag. 105-129.

Aglianò, P., Montagna, F., *Varieties of BL-Algebras II* Studia Logica, 2018, vol. 106, n. 4, pag. 721–737.

Aglianò, P., *Varieties of BL-Algebras III* Studia Logica, 2018.

Di Nola, A., Lettieri, A., *Equational Characterization of All Varieties of MV-Algebras* Journal of Algebra, 1999, vol. 221, n. 2, pag. 463 - 474.

Esteva, F., Godo, L., Montagna,F., *Equational characterization of the subverieties of BL generated by t-norm algebras* Studia Logica, 2004, vol. 76, n. 2, pag. 161-200.

Hecht, T., Kartiňak, T., *Equational classes of relative Stone algebras* Notre Dame J. Formal Logic 13 (1972), no. 2, 248–254.

Lubomirsky, N., *Técnicas geométricas y combinatorias en el estudio de subvariedades de BL-álgebras* Tesis Doctoral, Universidad Nacional de La Plata, 2017.